УДК 530.19, 537.812

В.В.Архипов, Т.М.Орымбай

Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова
(E-mail: midav_73@mail.ru)

Влияние на тензор энергии-импульса процедуры симметризации

В работе исследуется влияние процедуры симметризации на физический смысл компонент тензора энергии-импульса, а именно сравниваются компоненты и свойства симметризованного тензора энергии-импульса с тензором, полученным на основе Нётер теоремы. В качестве конкретного примера, для иллюстрации сделанных выводов и заключений, рассматривается случай электростатики. Показано, что, несмотря на тождественность двух формул для тензора энергии-импульса относительно реализации законов сохранения, физический смысл их компонент не тождествен.

Ключевые слова: тензор энергии-импульса, Нётер теорема, 4-импульс, процедура симметризации.

Введение

Согласно теореме Нётер каждой симметрии системы соответствует некий закон сохранения. Так, например, законы сохранения энергии и импульса, как известно, обусловлены трансляционными симметриями для времени и трех пространственных измерений. Момент импульса сохраняется в силу изотропности пространства и т.д.

Тензор энергии-импульса (ТЭИ), полученный исходя из теоремы Нётер, имеет вид

$$T^i_j = \frac{\partial \Lambda}{\partial(\partial_i \phi^{(m)}_{(k)})}\partial_j \phi^{(m)}_{(k)} - \delta^i_j \Lambda , \tag{1}$$

где Λ — Лагранжиан, определяющий действие системы $S = \int \Lambda \, dt dV$, и под $\phi^{(m)}_{(k)}$ понимается поле любого ранга (векторное, тензорное или др.). Законы сохранения энергии и импульса записываются в виде равенства нулю 4-дивергенции:

$$\partial_i T^i_j = 0 , \tag{2}$$

что является обобщением уравнения непрерывности.

Выражение (1), как это видно, не является симметричным. Однако есть ряд указаний на то, что оно должно быть именно симметричным [1]. Одним из них является желание сохранить выражение для момента импульса в виде, схожем с классическими формулами ($L_z = xp_y - yp_x$ и т.д.). В соответствии с этим для 4-тензора момента импульса мы должны иметь

$$L^{ij} = \frac{1}{c}\int (x^i T^{jk} - x^j T^{ik}) dS_k ,$$

где $T^{ij} = T^i_k g^{kj}$; dS_k — элемент гиперповерхности, охватывающей некий 4-объем ($dS_0 = dV$; $dS_1 = -cdt\, dy\, dz$ и т.д.). Это условие и приводит к требованию симметричности ТЭИ $T^{ij} = T^{ji}$.

Другим основанием для симметричности ТЭИ является его вид в Общей теории относительности, где он может быть вычислен варьированием действия по метрике g^{ij}, которая предполагается имеющей нетривиальный вид. Теперь действие должно записываться в виде

$$S = \frac{1}{c}\int \Lambda \sqrt{-g}\, d\Omega ,$$

где $\sqrt{-g}\, d\Omega$ есть элементарный объем в криволинейной системе координат.

$$T_{ij} = \frac{2}{\sqrt{-g}}\left(\frac{\partial(\sqrt{-g}\Lambda)}{\partial g^{ij}} - \partial_k \frac{\partial(\sqrt{-g}\Lambda)}{\partial(\partial_k g^{ij})} \right) . \tag{3}$$

Выражение в скобках есть не что иное, как уравнение Эйлера-Лагранжа относительно метрики как физического поля.

В качестве третьего довода в пользу процедуры симметризации можно указать на «некрасивость» выражения ТЭИ, получаемого методом (1), для электромагнитного поля:

$$T^{ij}=-\frac{1}{4\pi}g^{ik}(\partial_k A_m)F^{jm}+\frac{1}{16\pi}g^{ij}F_{km}F^{km}, \qquad (4)$$

где мы имеем смешивание двух разных представлений электромагнитного поля — энергетического (4-потенциал) и силового.

Основным методом симметризации ТЭИ является добавление к нему некоторого тензора специального вида:

$$T^{ij}_{sym}=T^{ij}+\partial_k\Psi^{ikj}, \qquad (5)$$

где $\Psi^{ikj}=-\Psi^{kij}$. Антисимметричность обеспечивает выполнение закона сохранения в виде (2)

$$\partial_i T^{ij}_{sym}=\partial_i T^{ij}+\partial_i\partial_k\Psi^{ikj}=\partial_i T^{ij}=0.$$

Например, в случае электродинамики, выбирают

$$\partial_m\Psi^{imj}=\frac{1}{4\pi}\partial_m(g^{ik}A_k\,F^{jm}). \qquad (6)$$

Учитывая уравнение движения для электромагнитного поля без источников $\partial_m F^{jm}=0$, вместо (4) получим «красивое» симметричное выражение

$$T^{ij}=\frac{1}{4\pi}g^{ik}F_{km}F^{mj}+\frac{1}{16\pi}g^{ij}F_{km}F^{km}. \qquad (7)$$

Самым известным методом нахождения конкретного вида преобразования (3) является метод Белинфанте [2]. Однако некоторая его искусственность стимулирует поиски других подходов, более непосредственных. Это обусловливает регулярное появление публикаций, посвященных исследованию процедуры построения тензора энергии-импульса. Например, в работе [3] показана возможность получения симметричного ТЭИ на основе только теоремы Нётер, но с включением в промежуточные выкладки условия выполнения тождества Бьянки. Работа [4] посвящена исследованию схемы Абрагама для ТЭИ электромагнитного поля. В работе [5] исследуется взаимосвязь определений ТЭИ на основе Нётер теоремы (1) и формулы Эйнштейна (3).

В настоящей работе мы разберем на паре примеров влияние процедуры симметризации на физический смысл компонент тензора энергии-импульса.

Физический смысл компонент ТЭИ

Уравнение (2) представляет собой систему четырех законов сохранения:

$$\partial_i T^i_0=0,\ \partial_i T^i_1=0,\ \partial_i T^i_2=0,\ \partial_i T^i_3=0. \qquad (8)$$

Если принять, что компонента T^0_0 имеет смысл плотности энергии w, то остальные компоненты в первом уравнении должны иметь физический смысл плотности потока энергии, т.е. вектора Умова-Пойнтинга $\vec{S}=(cT^1_0,cT^2_0,cT^3_0)$. Здесь мы добавили скорость света c в соответствии с определением, принятым в электродинамике. Таким образом, вместо первого уравнения системы (8) мы можем записать закон сохранения энергии:

$$\frac{\partial w}{\partial t}=-\nabla\vec{S}.$$

Естественно предположить, в силу принципа ковариантности, что остальные три уравнения (8) соответствуют законам сохранения трех компонент обобщенного импульса. Если ввести обозначения π_x, π_y, π_z для плотностей компонент импульса и $\vec{J}_x$, $\vec{J}_y$, $\vec{J}_z$ для соответствующих потоков плотности, то закон сохранения импульса можно записать в виде системы

$$\frac{\partial\pi_x}{\partial t}=-\nabla\vec{J}_x,\ \frac{\partial\pi_y}{\partial t}=-\nabla\vec{J}_y,\ \frac{\partial\pi_z}{\partial t}=-\nabla\vec{J}_z.$$

Если сделать отождествление этих выражений, с точностью до знака, с тремя последними уравнениями (8), то контравариантную версию ТЭИ можно записать в виде

$$T^{ij}=\begin{pmatrix} w & c\pi_x & c\pi_y & c\pi_z \\ S_x/c & J_{xx} & J_{yx} & J_{zx} \\ S_y/c & J_{xy} & J_{yy} & J_{zy} \\ S_z/c & J_{xz} & J_{yz} & J_{zz} \end{pmatrix}. \qquad (9)$$

Получившийся тензор не является симметричным. Чтобы продемонстрировать это, достаточно в качестве примера рассмотреть поток частиц, характеризующийся плотностью массы ρ и полем скоростей $\vec{v}(\vec{r})$. Тогда в классическом приближении плотность энергии, плотность потока энергии и плотность импульса x можно записать в виде

$$w = \rho c^2 + \frac{\rho v^2}{2}, \ \vec{S} = w\vec{v} = \left(\rho c^2 + \frac{\rho v^2}{2}\right)\vec{v}, \ \vec{\pi} = \rho\vec{v} .$$

Отсюда ясно, что тензор типа (9) может быть симметричным только в некоторых частных случаях, например, если $\vec{v} = 0$ или если соотношение между энергией и импульсом имеет тривиальный характер $E = pc$, как это свойственно для фотонов. Если же найти способ симметризовать этот ТЭИ, например, с помощью процедуры (5), то возникает вопрос: как это скажется на физическом смысле его компонент?

Считается, что процедура (5) не влияет на определение 4-импульса системы (следующее выражение взято из [1]):

$$P^i = const\int T^{ij} dS_j . \tag{10}$$

Ввиду этого не так уж важно наличие физического смысла у неизмеряемых непосредственно величин T^{ij}. Доказательство инвариантности (10) относительно преобразования (5) заключается в следующем. После подстановки мы получим

$$P^i = const\int (T^{ij} + \partial_k \Psi^{ikj}) dS_j .$$

Довесок к импульсу имеет вид дивергенции, и, следовательно, интеграл с ним может быть преобразован, согласно теореме Остроградского-Гаусса, в интеграл по поверхности, ограничивающей область интегрирования (трехмерную гиперповерхность в пространстве-времени). Поскольку эта поверхность находится на бесконечности — там, где физические поля обращаются в ноль, то и интеграл с довеском равен нулю.

Нам представляется интересным рассмотреть этот момент более подробно. Возьмем за основу тензор со смешанными компонентами T^i_j. Используя полностью антисимметричный тензор ε_{ijkl} ($\varepsilon_{0123} = 1$), можно построить четырехкомпонентную дифференциальную антисимметричную 3-форму вида $\frac{1}{3!} T^i_m \varepsilon_{ijkl} dx^j \wedge dx^k \wedge dx^l$. Интеграл её должен давать ковектор, который имеет смысл ассоциировать с 4-импульсом:

$$cP_m = \frac{1}{3!}\iiint T^i_m \varepsilon_{ijkl} dx^j \wedge dx^k \wedge dx^l .$$

Действительно, для нулевой компоненты будем иметь

$$cP_0 = \iiint T^0_0 \varepsilon_{0123} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + \iiint T^1_0 \varepsilon_{1023} dx^0 \wedge dx^2 \wedge dx^3 +$$
$$+ \iiint T^2_0 \varepsilon_{2013} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^3 + \iiint T^3_0 \varepsilon_{3012} dx^0 \wedge dx^1 \wedge dx^2 .$$

Учитывая знаки компонент тензора Леви-Чивиты и смысл антисимметричных произведений дифференциалов координат как ориентированных площадок, получим

$$cP_0 = \int T^0_0 dV - c\iint T^1_0 dt dS_x - c\iint T^2_0 dt dS_y - c\iint T^3_0 dt dS_z .$$

Если интегрирование будем вести по гиперповерхности постоянного времени, т.е. по объему, то последние три слагаемых равны нулю. В результате мы получим обычное выражение для энергии системы в заданном объеме:

$$E = cP_0 = \int_V w dV .$$

Совершенно аналогичным образом получаются компоненты импульса системы:

$$P_1 = -P_x = -\int \pi_x dV, \ P_2 = -P_y = -\int \pi_y dV, \ P_3 = -P_z = -\int \pi_z dV .$$

Здесь знак «–» возник из-за того, что у ТЭИ со смешанными компонентами все знаки, кроме первого столбца, обратные, по сравнению с (9), что обусловлено действием метрического тензора $T^{ij} = T^i_k g^{kj}$.

Преобразование (5), т.е. добавление к ТЭИ выражения вида $\partial_k \Psi_j^{ik}$, приведет к следующему преобразованию 4-импульса:

$$P_j \to P_j + \frac{1}{c}\int_V \partial_k \Psi_j^{0k} dV . \tag{11}$$

Если дополнительное слагаемое не исчезает при интегрировании по всему объему, то возникает вопрос об однозначном определении самих энергии и импульса системы.

Электростатическое поле

В качестве конкретной задачи, иллюстрирующей приведенные выше рассуждения, рассмотрим равномерно заряженную сферу. Удобство этой системы обусловлено её локальностью и отсутствием бесконечных значений полей.

Пусть заряд q равномерно распределен по сфере радиуса R_0. Таким образом, 4-потенциал поля во внешней области имеет только одну нетривиальную компоненту φ:

$$A^i = (q / r, 0, 0, 0) .$$

Тензор электромагнитного поля также имеет простой вид:

$$F^{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -qx/r^3 & -qy/r^3 & -qz/r^3 \\ qx/r^3 & 0 & 0 & 0 \\ qy/r^3 & 0 & 0 & 0 \\ qz/r^3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{12}$$

Выражение вида (6) приводит к изменению 4-импульса системы, согласно (11), на величину

$$\frac{1}{c}\int_V \partial_m \Psi^{0mj} dV = \frac{1}{4\pi c}\int_V \partial_m (g^{0k} A_k F^{jm}) dV .$$

Учтем, что $A_0 = \varphi$ и тензор F^{ij} не содержат зависимости от времени, так что $\partial_0 (g^{0k} A_k F^{j0}) = 0$; метрика имеет диагональный вид и $g^{00} = 1$; значения F^{jm} нетривиальны только при $j = 0$ (см. (12)), и набор F^{01}, F^{02}, F^{03} составляет вектор напряженности $-\vec{E}$. Таким образом, из последнего выражения следует

$$\int_V \partial_m \Psi^{0m0} dV = -\frac{1}{4\pi}\int_V \mathrm{div}(\varphi \vec{E})\, dV = -\frac{1}{4\pi}\oint_{\partial V} \varphi \vec{E}\, d\vec{S} ,$$

где мы воспользовались теоремой Остроградского-Гаусса и перешли к интегралу по замкнутой поверхности. Принимая во внимание сферическую симметрию задачи, последний интеграл может быть вычислен немедленно:

$$\oint_{\partial V} \varphi \vec{E}\, d\vec{S} = \varphi(r)\, E(r) \cdot 4\pi r^2 . \tag{13}$$

Окончательно получаем:

$$\int_V \partial_m \Psi^{0m0} dV = -\frac{q^2}{r} .$$

Таким образом, при $r \to \infty$ мы действительно получаем нулевое влияние преобразования (5) на значения 4-импульса. Но дело в том, что для симметризации ТЭИ электромагнитного поля нам нужно добавить к тензору довесок не в виде (6), а в виде

$$\partial_m \Psi^{imj} = \frac{1}{4\pi} g^{ik} (\partial_m A_k) F^{jm} , \tag{14}$$

который совпадает с (6) только при отсутствии источников, т.е. когда $\partial_m F^{jm} = 0$. А это не то, что имеет место во всем пространстве для рассматриваемой модели.

Довесок к 4-импульсу на основе (14) приведет к следующему преобразованию:

$$P^j \to P^j + \frac{1}{c}\int_V \frac{1}{4\pi} g^{0k} (\partial_m A_k) F^{jm} dV .$$

Аналогично предыдущим рассуждениям получим поправку к $E = cP^0$:

$$-\frac{1}{4\pi}\int_V grad\phi\cdot\vec{E}dV = \frac{1}{4\pi}\int_V E^2 dV = \frac{1}{4\pi}\int_{R_0}^{\infty}\frac{q^2}{r^4}4\pi r^2 dr = \frac{q^2}{R_0}.$$

Этот же результат мы бы получили, если бы в выражении (13) понимали под объемом V только внешнюю область системы. Тогда в качестве границы добавится внешняя поверхность заряженной сферы и вместо (13) мы бы имели

$$\oint_{\partial V}\varphi\vec{E}\,d\vec{S} = \varphi(r)E(r)\cdot 4\pi r^2 - \varphi(R_0)E(R_0)\cdot 4\pi R_0^2$$

и, соответственно,

$$\int_V \partial_m \Psi^{0m0} dV = -\frac{q^2}{r} + \frac{q^2}{R_0}.$$

Таким образом, преобразование (5) приводит к нетривиальным преобразованиям (11), т.е. имеет место проблема однозначного определения 4-импульса.

Заключение

Приведенные выше рассуждения позволяют сделать однозначный вывод о том, что общепринятая процедура симметризации (5), хотя и приводит к правильному выражению ТЭИ, но имеет свойство влиять на физический смысл как компонент тензора энергии-импульса, так и измеряемых величин — компонент 4-импульса. Интересным моментом, на наш взгляд, является то, что вычисленные по формулам (4) и (7) для произвольного электростатического поля ТЭИ оба являются симметричными, но отличаются знаком T^{00} компоненты:

$$T^{ij} = \frac{1}{8\pi}\begin{pmatrix} -E^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E^2-2E_x^2 & -2E_xE_y & -2E_xE_z \\ 0 & -2E_xE_y & E^2-2E_y^2 & -2E_yE_z \\ 0 & -2E_xE_z & -2E_yE_z & E^2-2E_z^2 \end{pmatrix},$$

$$T_{sym}^{ij} = \frac{1}{8\pi}\begin{pmatrix} E^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E^2-2E_x^2 & -2E_xE_y & -2E_xE_z \\ 0 & -2E_xE_y & E^2-2E_y^2 & -2E_yE_z \\ 0 & -2E_xE_z & -2E_yE_z & E^2-2E_z^2 \end{pmatrix}.$$

Отрицательное значение плотности энергии у тензора T^{ij} является, несомненно, плохим признаком ввиду положительной определенности энергии электрического поля. В принципе, эту ситуацию легко исправить, переобозначив тензор, умножив его первый столбец на –1, что не нарушит следующих из него законов сохранения (2). Однако такое преобразование, опять-таки, выглядит искусственным. То есть имеет вид исправления формулы (1), не имеющего физической интерпретации.

В плане физической интерпретации неубедительной также выглядит процедура, предложенная в работе [3]. Действительно, если рассматривать электродинамику как когомологичную теорию, тензор электромагнитного поля является точной 2-формой, в силу своего определения ($F = dA$). Таким образом, тождество Бьянки, или 1-я пара уравнений Максвелла, является автоматическим следствием замкнутости точных дифференциальных форм ($dF = d\wedge dA = 0$). Поэтому его дополнительная фиксация выглядит излишней процедурой.

Список литературы

1 *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. — М.: Физматлит, 2001. — 534 с.

2 *Belinfante F.J.* On the Spin Angular Momentum of Mesons // Physica. — Vol. 6(9). — P. 887–898.

3 *Montesinos M., Flores E.* Symmetric energy-momentum tensor in Maxwell, Yang-Mills, and Proca theories obtained using only Noether's theorem // Revista Mexicana de Fisica. — Vol. 52 (1). — P. 29–36.

4 *Pfeifer R.N.C., Nieminen T.A., Heckenberg N.R., Rubinsztein-Dunlop H.* Constraining Validity of the Minkowski Energy–Momentum Tensor // Physical Review A. — Vol. 79(2). — P. 023813(1–7).

5 *Ohanian H.C.* The Energy-Momentum Tensor in General Relativity and in Alternative Theories of Gravitation, and the Gravitational vs. Inertial Mass // Preprint www.arxiv.org arXiv: 1010.5557 [gr-qc] 26 Oct 2010.

В.В.Архипов, Т.М.Орымбай

Симметризация рәсімінің энергия-импульс тензорына әсер етуі

Мақалада энергия-импульс тензор компонентінің физикалық мағынасына симметризация рәсімінің әсер етуі зерттелді. Атап айтқанда, симметриялық энергия-импульс тензор компоненттері мен қасиеттері Нётер теореманың негізінен алынған тензормен салыстырылды. Жасалған тұжырымдар және қорытындыларды сипаттау үшін, нақты мысал ретінде электростатика жағдайы қарастырылды. Сақталу заңдарын жүзеге асыруға қатысты энергия-импульс тензоры үшін екі формуланың тепе-теңдігіне қарамастан, олардың компонентінің физикалық мағынасы бірдей еместігі көрсетілген.

V.V.Arkhipov, T.M.Orymbay

Influence of symmetrization procedure on stress-energy tensor

Influence on physical mean of stress-energy tensor components by the symmetrization procedure is investigated in the article. Namely, the components and properties of the symmetrized stress-energy tensor are compared with one that got on the base of Noether theorem. As a concrete example for illustration of following summaries and conclusions of the work the case of electrostatics is considered. It is showed that physical mean of its components are not identical in spite of equality the tensors about conservation laws realization.

References

1 Landau L.D., Lifshitz E.M. *Field Theory*, Moscow: Fizmatlit, 2001, 534 p.

2 Belinfante F.J. *Physica*, 6(9), p. 887–898.

3 Montesinos M., Flores E. *Revista Mexicana de Fisica*, 52(1), p. 29–36.

4 Pfeifer R.N.C., Nieminen T.A., Heckenberg N.R., Rubinsztein-Dunlop H. *Physical Review A*, 79(2), p. 023813(1–7).

5 Ohanian H.C. *The Energy-Momentum Tensor in General Relativity and in Alternative Theories of Gravitation, and the Gravitational vs. Inertial Mass*, Preprint www.arxiv.org arXiv: 1010.5557 [gr-qc] 26 Oct 2010.